TEMA LIVRE

QUAIS OS SIGNIFICADOS DO NÚMERO ZERO? PERCEPÇÕES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

WHAT ARE THE MEANINGS BEHIND NUMBER 0? PERCEPTIONS OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS

Laís Aparecida Romanello[104]
Renata Prenstteter Gama[105]

Submissão: 31/01/2018 Revisão: 05/03/2018 Aceite: 14/03/2018

Resumo: O artigo relata uma pesquisa desenvolvida no âmbito do Programa Observatório da Educação (OBEDUC) com objetivo de compreender como licenciandos de matemática de uma universidade federal de São Paulo lidam com o número zero nos diferentes pensamentos da Matemática. Para isso foi aplicado um questionário misto envolvendo o conceito do número zero nas diversas áreas da Matemática. Na análise tem-se que os alunos ingressam na graduação com uma deficiência no assunto, sendo tratado em alguns conteúdos como procedimental, apenas para operalização nos diversos cálculos.

Palavras chave: Zero. Educação Matemática. Licenciatura. Formação Inicial

Abstract: This paper aims to elucidate how pre-service Mathematic teachers, at São Paulo Federal University, comprehend the zero number, throughout different contexts in Mathematics. It was developed by an undergraduate student with the Observatory of Education Program (OBEDUC), which used a pool with questions based on different mathematical contexts. Results showed that first year students lack the concepts, therefore, these are approached in a procedural way, entirely used to operate various calculations.

Keywords: Zero. Mathematics Education. Graduation. Initial formation.

[104] Doutoranda. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP. E-mail: laisromanello@gmail.com
[105] Doutora. Universidade Federal de São Carlos - UFSCar. E-mail: renatapgama@gmail.com

Introdução

O presente artigo refere-se a uma pesquisa de iniciação científica desenvolvida no âmbito de um projeto de pesquisa pertencente ao Programa Observatório da Educação (OBEDUC[106]) em uma universidade pública federal. Uma das inquietações que levou ao desenvolvimento da pesquisa foi: Como licenciandos em Matemática lidam com o número zero nas diversas áreas da Matemática?

Tendo em vista a pergunta diretriz, o objetivo da pesquisa consistiu em compreender como os licenciandos lidam em relação ao número zero nos diferentes pensamentos da Matemática. A abordagem utilizada para o desenvolvimento da pesquisa foi a qualitativa, pois a "preocupação não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão" (GOLDENBERG, 1997, p.14) desse grupo. Além disso, a pesquisa qualitativa fornece "informações mais descritivas, que primam pelo significado dado as ações" (ARAÚJO; BORBA, 2013, p. 46-47), o que a difere das demais modalidades, por trazer essa subjetividade para os dados.

O interesse pela temática da pesquisa se deu por meio de um estudo desenvolvido pelo grupo de pesquisa que consistiu na análise dos relatórios do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) de 2009, 2010 e 2011, tendo como foco apontar algumas dificuldades apresentadas pelos alunos da Educação Básica. Para isso, as questões apresentadas nesses relatórios foram exploradas e discutidas, gerando reflexões a respeito de como os alunos pensaram para colocar determinada alternativa como resposta. Nessas análises, foi possível identificar supostas confusões que os alunos cometem ocasionando na resposta errada da questão.

[106] Financiado pela CAPES/INEP.

Dentre as dificuldades e confusões elencadas nesse estudo, o zero foi um dos assuntos emergentes que chamou atenção das autoras deste artigo para um aprofundamento teórico.

O zero está presente na maior parte dos conteúdos matemáticos e é possível notar que, na maioria das vezes, ele é abordado de maneira diferenciada quando comparado aos demais números, trazendo, assim, dúvidas e inquietações que, quando não são discutidas e esclarecidas, geram dificuldades no entendimento dos conteúdos. Na divisão, por exemplo, o zero não pode assumir o papel de divisor, assim como não pode ser o denominador de uma fração; na potenciação, quando o expoente é zero, para qualquer valor na base tem-se que o resultado é um, no entanto, quando a base também é zero, tem-se uma indeterminação; no plano cartesiano, a interseção dos eixos é o ponto (0,0); na adição o zero é o elemento neutro, já na multiplicação ele torna o resultado igual a zero.

Nesses exemplos, é possível notar algumas particularidades desse número em alguns conteúdos da Matemática. Essas particularidades muitas vezes são tratadas simplesmente como convenções e não são exploradas de modo a compreender o conteúdo.

Buscando traçar um panorama sobre essa temática, foi realizado um levantamento bibliográfico em relação às pesquisas sobre o zero. Na próxima seção será apresentada essa revisão de literatura.

O zero nas pesquisas em Educação Matemática

Buscando sobre essa temática no banco de dados da CAPES e revistas como Zétetike, foi possível perceber que poucas são as pesquisas envolvendo o número zero. Foram encontrados dois trabalhos nessa perspectiva, Salvador e Nacarato (2003) e Guimarães (2008), ambas voltadas para o zero na Educação Básica e que compôs um panorama sobre o que as pesquisas brasileiras dizem a respeito desse assunto.

Salvador e Nacarato (2003) apresentam os sentidos que alunos da 6º série[107] do Ensino Fundamental atribuem ao zero e a transformação dessas ideias. Para isso, a pesquisa foi dividida em três momentos. No primeiro momento os alunos foram indagados a escrever sobre qual o significado do zero. Em seguida, após atividades realizadas em sala de aula, como jogos envolvendo os números relativos, discussões sobre a história do zero, atividades relacionadas à variação de temperatura, transações comerciais e sobre a reta numérica, era lançada a mesma pergunta aos alunos com o intuito de observar se eles atribuíram novos sentidos ao zero. O terceiro momento aconteceu após o término do estudo dos números relativos e se sucedeu da mesma maneira, ou seja, a pergunta inicial era retomada buscando o mesmo objetivo dos momentos anteriores, perceber se houve alguma mudança em relação à percepção dos alunos em relação ao zero.

Analisando as respostas dos alunos as autoras identificaram os seguintes significados para o número: zero como elemento de contagem, como valor posicional, como dado operatório e como origem. Além disso, puderam concluir que a frequência com que apareciam cada um desses significados durante os três momentos se alterava de acordo com o que estava sendo estudado em cada um deles. Sendo assim, não foi possível identificar se houve a estabilização de tais significados. Além disso, as autoras defendem que

> A escola deve se colocar como instituição privilegiada onde os conhecimentos espontâneos já adquiridos na vida social sejam transformados em conhecimentos científicos, cuja aquisição ocorre por processos de sistematização. Assim, partir dos sentidos que os alunos já possuem para o zero poderia ser o fundamento para um trabalho com os números relativos e a construção da reta numérica (SALVADOR, NACARATO; 2003, p.15).

[107] Atualmente 7º ano do Ensino Fundamental II.

A outra pesquisa encontrada, Guimarães (2008), consiste em uma dissertação de mestrado que foi norteada pela seguinte questão: "Quais os sentidos atribuídos ao zero por alunos de diferentes idades e séries da escolaridade?" (GUIMARÃES, 2008, p.21). Para responder a essa questão a autora realizou entrevistas com aluno da 1ª série do Ensino Fundamental até o 1º ano do Ensino Médio. As entrevistas foram realizadas de forma individual e coletivamente, na qual, os professores responsáveis das turmas escolheram os alunos de forma aleatória.

As perguntas consistiam em falar sobre o número zero, questionar se eles usam esse número, para que ele serve e onde é utilizado nas aulas de Matemática. Para a análise, a autora separou os dados de acordo com os níveis de ensino e ainda elencou quatro sentidos para o zero nas falas dos alunos, são eles: zero como técnica matemática, como conceito, como técnica social e como metáfora. Guimarães (2008) compara os principais pontos e falas dos alunos apontando as respostas dos diferentes níveis e também entre os alunos dos mesmos níveis. Diante das discussões a autora afirma

> O zero "nada", o zero "muito", o zero "fracasso", o zero "início", o zero "centro", "o zero nas operações", "o zero na história" quantos zeros foram discutidos neste trabalho. E o mais importante a ressaltar é a participação dos alunos para a discussão destes tantos zeros (GUIMARÃES, 2008, p. 93).

Com base nesses trabalhos que apresentaram a defasagem do estudo do zero nas séries iniciais e finais do Ensino Fundamental I e II e do Ensino Médio, e, tendo como hipótese que os alunos saem da escola e entram nas universidades com algumas dificuldades em relação a conteúdos matemáticos, como, neste caso, o conceito do zero, houve o questionamento em relação aos alunos do Ensino Superior: Como esses graduandos estão compreendendo os significados do zero? Como ensinariam esses conceitos na Educação Básica?

Dessa forma, a seção seguinte apresenta o cenário na qual a pesquisa foi desenvolvida, bem como o perfil dos participantes.

Cenário da Pesquisa

Buscando responder a pergunta de pesquisa supracitada, foi elaborado e aplicado um questionário aberto com os licenciandos em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, campus São Carlos (UFSCar). O objetivo era investigar como os licenciandos compreendem e lidam com o número zero nos diferentes ramos da Matemática apresentados nas questões.

Em relação ao questionário, as primeiras perguntas foram elaboradas buscando identificar o perfil dos participantes do curso. Essas questões consistem em dados pessoais e de formação acadêmica dos participantes.

As perguntas referentes ao zero foram elaboradas e discutidas no grupo de pesquisa não com o intuito de verificar se os licenciandos acertavam ou erravam as questões, mas sim, analisar como eles lidam com o zero na Matemática. O questionário era composto por cinco questões, apresentadas a seguir, que abordaram o zero nas diversas áreas da Matemática, são elas: Aritmética, Geometria, Grandezas e Medidas e Álgebra.

O questionário foi aplicado a um total de 107 graduandos de Matemática da UFSCar matriculados no primeiro semestre de 2014. Desses alunos, 44 estavam matriculados no 1º semestre do curso, 18 no 3º semestre, 10 no 5º semestre, 16 no 7º semestre, 3 no 9º semestre, 9 que não se identificaram, 5 de outros cursos (que não entraram nas análises) e 2 que não responderam. Esses alunos da Matemática compõem oito turmas, nas quais quatro são do período diurno/integral e quatro do período noturno.

As questões que compunham o questionário buscando evidenciar a maneira como os licenciandos lidam em relação ao zero eram as seguintes:

1ª questão: O zero é um número par ou ímpar? Por quê?

2ª questão: O zero pode ser representado na geometria?

(A) Não. Por quê? (Explique no espaço abaixo)

(B) Sim. Como? Desenhe se achar necessário.

3ª questão: Qual o significado do zero para os conceitos que envolvam grandezas e medidas?

4ª questão: Por que todo número (diferente de zero) elevado a 0 (zero) é 1 (um)? Como você ensinaria para os alunos do Ensino Fundamental?

5ª questão: O que significa a expressão "zero de função"? Como você ensinaria para alunos do Ensino Médio?

Importante ressaltar que os licenciandos foram orientados da não obrigatoriedade das respostas das perguntas, além de que as questões não seriam corrigidas. Foram, ainda, alertados de que as informações seriam restritas às pesquisadoras e à pesquisa e que isso não interferiria em suas notas nas disciplinas da graduação. Na próxima seção serão apresentados os dados da pesquisa bem como a forma da qual foi realizada a análise.

A manifestação dos licenciandos em relação ao zero

Buscando identificar as percepções dos licenciandos a respeito do número zero, foi realizada uma análise por questão e, em seguida as respostas foram confrontadas com as demais respostas dos participantes dos mesmos períodos do curso. A ideia era observar se houve alguma relação com as respostas e as disciplinas que estavam cursando no momento em que se passou a pesquisa. Abaixo será apresentado um panorama das respostas obtidas, por questão, por meio do questionário.

1ª questão: O zero é um número par ou ímpar? Por quê?

Nessa questão, 56 licenciandos responderam que o número zero é par, e na maioria das vezes usaram como justificativa o fato de que todo número par pode ser escrito na forma $2k$, com k pertencente ao conjunto dos Números Inteiros e dessa maneira, tomando $k = 0$, 0 é um número par, como mostra a resposta abaixo dada por um dos alunos:

> "O zero é um número par, pois por definição um número $n \in \mathbb{Z}$, é par se, e somente se, $n = 2k$ com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, 0=2.0".

Nenhum dos licenciandos respondeu que o número zero é ímpar, no entanto, outras classificações apareceram como: indeterminado, nulo e neutro. Alguns exemplos dessas classificações estão elencados a baixo:

> "O zero é um número neutro, que serve como referencial na reta real, sendo um número neutro. Apenas para orientação".
> "0 é um número indeterminado".
> "O zero é considerado um número nulo. Logo, ele não pode ser considerado nem um número par nem um número ímpar".

Nessa questão é possível perceber as diferentes características do zero de acordo com sua função, por exemplo: o zero na reta se trata de um referencial, na adição é considerado um número neutro, no entanto na multiplicação ele anula os resultados e, também, é caracterizado como indeterminado quando está elevado a ele mesmo. Percebe-se que as palavras destacadas estão diretamente relacionadas com as respostas dadas pelos alunos, visto que o zero é abordado de todas essas maneiras nos diversos conteúdos matemáticos. Além disso, quando um aluno ingressa no curso de Matemática, é apresentado a ele a demonstração dos números pares que pode facilmente incluir o zero nessa

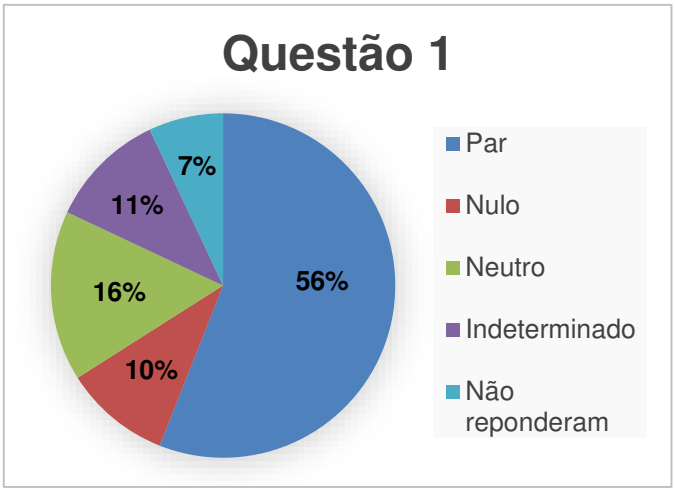
prova quando se considera o conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$) e daí está o fato de muitos alunos responderem que o número zero é par.

Analisando as respostas de acordo com as turmas não foi possível perceber distinção nas respostas levando em conta as disciplinas que estavam sendo cursadas ou que já haviam sido cursadas. No entanto, cabe destacar a respeito da representação dos números pares como $2k$ que apareceu como resposta para licenciando de todos os períodos e que é visto logo no primeiro semestre do curso de Matemática, e, em alguns casos, no Ensino Médio.

Foi possível concluir então que há certa confusão quanto ao modo de manipular o zero em suas diferentes abordagens matemáticas, por isso apareceram diversas respostas.

No Gráfico 1 é possível comparar a diversidade das respostas para essa questão e sua frequência.

Gráfico 1: Respostas da Questão 1



Fonte: Dados da pesquisa

2ª questão: <u>O zero pode ser representado na geometria? (A) Não. Por quê? (explique no espaço abaixo) (B) Sim. Como? Desenhe se achar necessário.</u>

Do total dos licenciandos que participaram da pesquisa, 18 assinalaram a alternativa A. Mesmo a questão pedindo para explicar a alternativa, muitos não

justificaram. Das justificativas dessa questão alguns dos argumentos utilizados foram: o fato de não ser possível representar a "ausência de algo", ou então que "não há forma geométrica para o conjunto vazio", e também que "não existe representação para o "nada"". Como exemplo, abaixo algumas respostas dos alunos.

> "(A) Não consigo desenhar uma representação para o "nada" na geometria".
> "(A) Não há uma forma geométrica que represente o conjunto vazio".
> "(A) Acredito que não, pois 0 representa a ausência de algo".

Em contra partida, 60 participantes assinalaram a alternativa B e como forma de representá-lo justificaram como sendo: um ponto, origem de uma reta, origem do plano cartesiano, distância entre dois pontos coincidentes, vetor nulo e vazio. Alguns licenciandos desenharam o plano cartesiano e marcaram a origem e outros desenharam um ponto de modo a representar o zero geometricamente. Vejam alguns exemplos das respostas obtidas:

> "(B) O zero pode ser representado como um ponto de um segmento de reta".
> "(B) Como o vazio".
> "(B) Ele pode ser representado como o ponto inicial na geometria. Exemplo, o ponto inicial de uma reta".
> "(B) Podemos representar o zero na geometria sim. Por exemplo: para expressar a medida do segmento AB quando A=B".
> "(B) No caso de plano cartesiano no encontro dos eixos".

Além disso, 17 licenciandos não responderam e 5 disseram que não sabiam.

Nessas falas, pode-se observar que os licenciandos que responderam a alternativa A, pensaram no zero como quantidade, dessa forma, não conseguiram representar justamente por, quando eu possuo "zero de alguma coisa" significa que eu "não tenho nada" e não há uma representação para o nada. Já os que responderam a alternativa B, é possível notar que visualizaram o zero nos conteúdos de geometria, como, a reta, o plano cartesiano e o segmento.

Observando as respostas de acordo com as turmas, foi possível perceber certa semelhança entre as respostas. Por exemplo, na turma do primeiro ano pode-se observar que grande parte dos alunos falou sobre o plano cartesiano e do vetor nulo, ambas as respostas estão ligadas com a disciplina de Geometria Analítica (GA) oferecida no primeiro semestre do curso. Pode-se observar também a influência dessa disciplina diretamente em algumas respostas como:

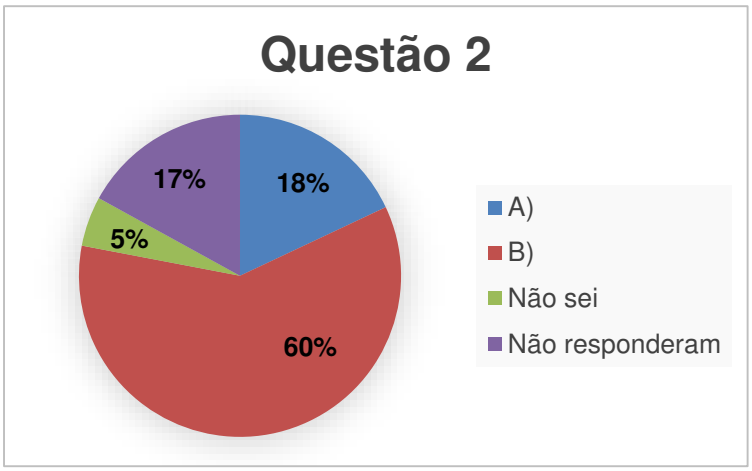
> "(B) Na Geometria Analítica o zero é essencial. Exemplo: Plano Cartesiano".
> "(B) Representa o vetor nulo, usado na GA".

Com relação à turma do quarto ano também foi possível perceber uma semelhança nas respostas levando em conta a distância entre pontos que estava sendo trabalhada na disciplina de Geometria Espacial Descritiva. Como exemplo tem a seguinte resposta:

> "(B) Depende do contexto. Pode-se atribuir um ponto ao número zero em coordenadas cartesianas, onde o número corresponde à distância do ponto à origem. Como a distância do ponto 0 a si mesmo é zero, pode-se atribuir a este ponto o número 0 (zero). O plano cartesiano não é o único exemplo".

Dessa maneira, pode-se concluir que nessa questão, o currículo influenciou alguns licenciandos a responderem a questão. A seguir, o Gráfico 2, apresenta as respostas dos alunos para essa questão.

Gráfico 2: Respostas da Questão 2



Fonte: Dados da e pesquisa

3ª questão: <u>Qual o significado do zero para os conceitos que envolvam grandezas e medidas?</u>

Embora as respostas tenham sido diversas nessa questão, foi possível classificá-las, basicamente, em dois tipos. Obteve-se o seguinte panorama: 13 licenciandos responderam que o zero se trata de um ponto inicial; 41 disseram ser a ausência de grandezas e medidas; 20 não responderam e 26 respostas não foram classificadas devido suas disparidades.

Abaixo é possível observar algumas das respostas classificadas:

> "Significa "nada". Simplesmente é a ausência de grandeza ou medida".
> "Zero pode ser considerado um ponto inicial para qualquer grandeza e até mesmo medida".
> "Seria o ponto inicial para se contar a medida ou grandeza, pois como é elemento neutro, ele não se é contábil. Pois não teria sentido colocarmos 0 balas por exemplo, o sentido maior e mais usado seria nenhuma bala".

> "Zero pode ser visto como a ausência de uma grandeza ou medida".

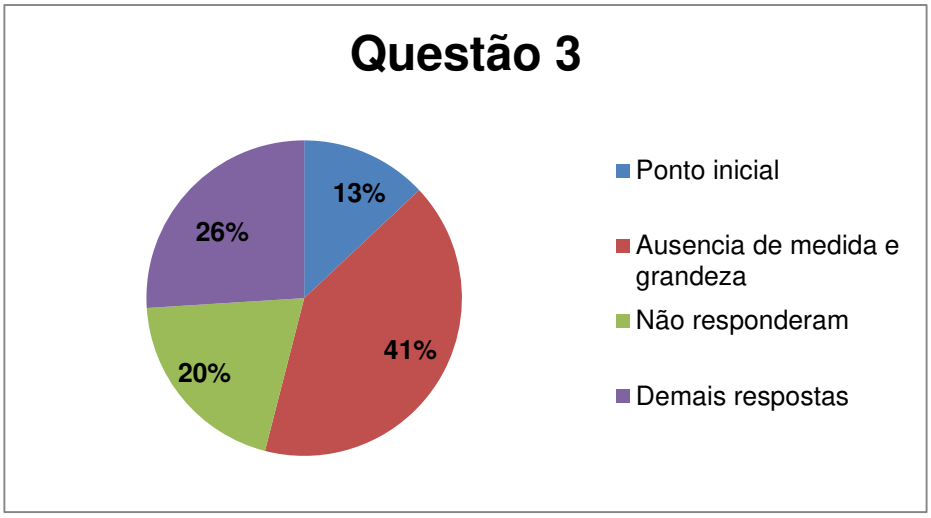
Alguns ainda consideraram a quantidade de zeros no que diz respeito ao valor posicional, por exemplo:

> "Quanto mais zeros, maior o número".

Nesse caso, temos a ideia do zero associado a outros números tornando-os maiores e não a ideia do zero sozinho.

No geral essa questão foi respondida igualmente entre as turmas não aparecendo disparidade entre os licenciandos e seus semestres cursados. Além disso, a disparidade e a grande quantidade de ausências de respostas é reflexo da incerteza quanto a esse número relacionado às grandezas e medidas. No Gráfico 3, é apresentada a porcentagem das respostas na qual as respostas distintas ficaram agrupadas em uma única classe denominada "Demais respostas".

Gráfico 3: Respostas da Questão 3



Fonte: Dados da pesquisa

4ª questão: <u>Por que todo número (diferente de zero) elevado a 0 (zero) é 1 (um)? Como você ensinaria para os alunos do Ensino Fundamental?</u>

Nessa questão, obteve-se 36 demonstrações para a questão, causando surpresa para as pesquisadoras. Algumas demonstrações genéricas e outras específicas, como é possível identificar nas respostas abaixo:

> "Porque, se tomarmos $n^0 = n^{x-x} = n^x . n^{-x} = \frac{n^x}{n^x} = 1$, com n≠0 e $n \in \mathbb{N}$. Logo, como n é qualquer número diferente de zero, segue que $n^0 = 1$. Para ensinar, basta levar em consideração as propriedades de potência de mesma base".
>
> "Matematicamente sabemos que: $2^1 . 2^{-1} = 2^0 . 2^0 = \frac{2}{2}$. No entanto, $\frac{2}{2} = 1$. Assim como para qualquer número real: $x^1 . x^{-1} = x^0 \rightarrow x^0 = \frac{x^1}{x^1} = 1$".

Essa demonstração é vista algumas vezes durante o Ensino Fundamental, Ensino Médio e também, logo no primeiro semestre do curso de Matemática. Não houve distinção em relação às respostas das turmas nessa questão, em todos os níveis do curso, apareceu a demonstração.

Grande parte dos licenciandos, 21, não responderam a questão, e outros 11 disseram não saber a resposta. Além disso, obtive-se 14 respostas dizendo que é uma definição ou ainda usaram a palavra convenção.

Poucos responderam como ensinariam em uma turma de Ensino Fundamental, no entanto, todos que responderam, afirmaram que ensinariam da mesma forma que compreendem a resposta dada à pergunta anterior, ou seja, quem realizou a demonstração, relatou que ensinaria através da demonstração e apresentaria exemplos; e quem respondeu como sendo uma definição, afirmou que ensinaria apresentando a definição desse conceito.

Algumas das respostas obtidas considerando como "convenção" ou "definição" foram as seguintes:

> "Convenção. Explicaria que qualquer número elevado a zero é 1 por convenção".
>
> "Acredito que um número n, com n diferente 0 quando elevado a zero resulta em 1 pois é uma definição que convém para alguns modelos matemáticos. Preciso pesquisar mais sobre o assunto para poder ensina-lo. Porém, hoje eu ensinaria dizendo exatamente isto: é uma definição conveniente."
>
> "Todo número diferente de zero elevado a zero é 1 por convenção. Eu ensinaria como sendo uma definição."

Já algumas das respostas dos alunos que fizeram a demonstração por meio da propriedade de potência de mesma base foram:

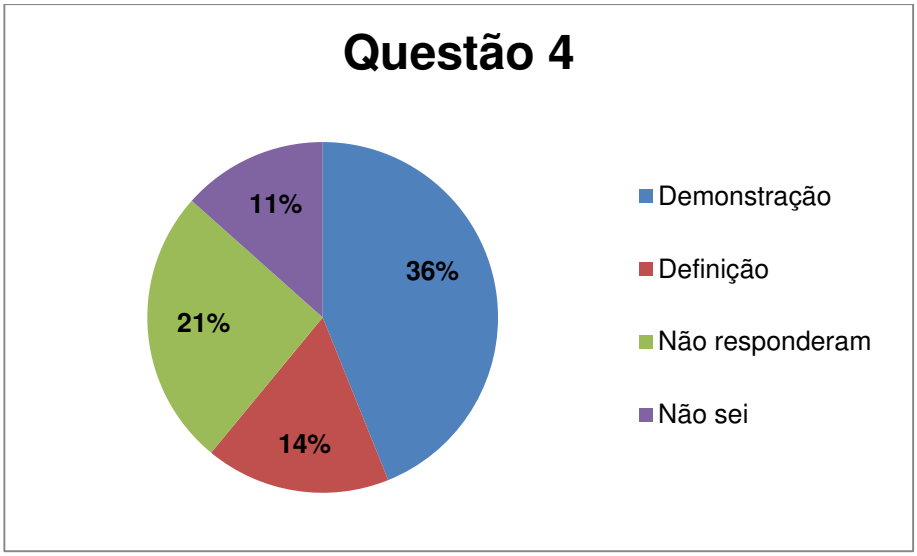
> "Pois $a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1$. Eu ensinaria da forma mostrada acima."
>
> "$x^0 = \frac{x^n}{x^n} = \frac{y}{y} = 1$. Ensinaria a propriedade $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ e ensinaria a explicação a cima."
>
> "Por regra de potenciação temos que se $\frac{2}{2} = 2^{1-1} = 2^0$e sabemos que $\frac{2}{2} = 1$, logo $2^0 = 1$. Ensinaria desta maneira descrita acima."

Podemos perceber com essas respostas que, muitas vezes, o zero em alguns conceitos matemáticos fica vago ou são até mesmo ensinados de maneiras diferentes de acordo com o entendimento de cada professor. No caso desse conteúdo de potência, alguns assumem como axioma, outros como uma

propriedade com sua demonstração, o que gera confusão aos alunos e até mesmo conflito de ideias quando discutidos.

No Gráfico 4 as respostas estão apresentadas em porcentagem de acordo com sua frequência. Foram classificadas como "Demonstração" as respostas dos alunos que lidam com esse conteúdo como uma propriedade e que trouxeram a demonstração da questão e como "Definição" os que disseram lidar com o zero como uma convenção ou definição.

Gráfico 4: Respostas da Questão 4



Fonte: Dados da pesquisa

5ª questão: <u>O que significa a expressão "zero de função"? Como você ensinaria para alunos do Ensino Médio?</u>

Essa questão surpreendeu as pesquisadoras, pois se esperava que não fosse tão difícil responder a essa pergunta, no entanto, as respostas mostraram o contrário. Obteve-se nessa questão 32 respostas em branco, 13 que responderam "não sei", 3 que disseram que a expressão significa atribuir o valor zero para o x na função e encontrar o valor correspondente, ou seja, calcular a $f(x)$, onde $x = 0,\ f(0)$. Além disso, 33 licenciandos responderam, dizendo que zero de função são os valores do domínio, os valores de x, tal que $f(x) =$

0. Ademais, foram obtidas outras 13 respostas distintas que não foram analisadas devido sua disparidade.

Abaixo são apresentados exemplos dos últimos três tipos de respostas citadas a cima. A última resposta exemplifica uma das 13 respostas distintas obtidas.

> "Zero de função significa os valores que são obtidos quando aplicamos a função no zero".
> "É o número onde a função atinge o valor zero. Ou seja, quando a função é aplicada a determinado número, e assume o valor nulo".
> "O zero da função é onde a função termina".

A confusão entre $f(0)$ e $f(x) = 0$ já era esperada devido às dificuldades que os alunos têm em relação às quais valores o x assume em uma função. No entanto é espantoso o número de licenciandos que não responderam e que disseram não saber a resposta, visto que essa expressão é muito utilizada tanto no Ensino Médio como na faculdade durante o curso de Matemática desde o primeiro semestre, durante o estudo de função, por exemplo.

Analisando as respostas por turma, foi possível perceber que 19 dos 48 licenciandos do primeiro ano deixaram de responder essa questão e 10 responderam "não sei". Já com relação à turma do segundo ano, apareceram respostas como:

> "É o elemento neutro (ou os elementos) do domínio que é (são) mandado (s) em algo que é considerado como 'zero' no contradomínio".

Ainda em relação aos licenciando do segundo ano, poucos foram os que não responderam a questão, e, nesse caso, o que predominou foi a resposta correta, ou seja, de que o zero de uma função é o valor de x para o qual $f(x) =$

0. Já as respostas obtidas pelo terceiro ano abrangeram todas as categorias de respostas. Por fim, os licenciandos do quarto, responderam corretamente a questão, obtendo duas respostas em branco e uma resposta com "não sei".

Dessa maneira, pode-se perceber que o domínio dessa expressão é desenvolvido de acordo com o andamento do curso, no entanto sabe-se que o domínio desse conceito deveria vir do Ensino Médio, pois é fundamental para o conceito de função.

Assim como a questão anterior, 12 foram os licenciandos que responderam como ensinariam um aluno do Ensino Médio, na qual, desses 12, 10 estavam no quarto ano do curso, no entanto, todos os participantes que responderam essa segunda parte da questão, foram licenciandos que deram a resposta correta quanto ao zero de uma função. Abaixo seguem algumas das respostas obtidas para essa questão.

> "Zero de função significa que quando colocamos um valor na variável da função, deixa a função igual a zero. O valor que deixa a função igual a zero é o zero da função. Para ensinar, tomaria uma função e a igualaria a zero. E para encontrar o valor que deixa a função igual a zero, a consideraria como uma equação e a resolveria."

> "Seria quando $f(x) = 0$, para algum $x \in Df$ [domínio da função]. Eu ensinaria que o "zero de função" seria o número que aplicado na função seria igual a zero."

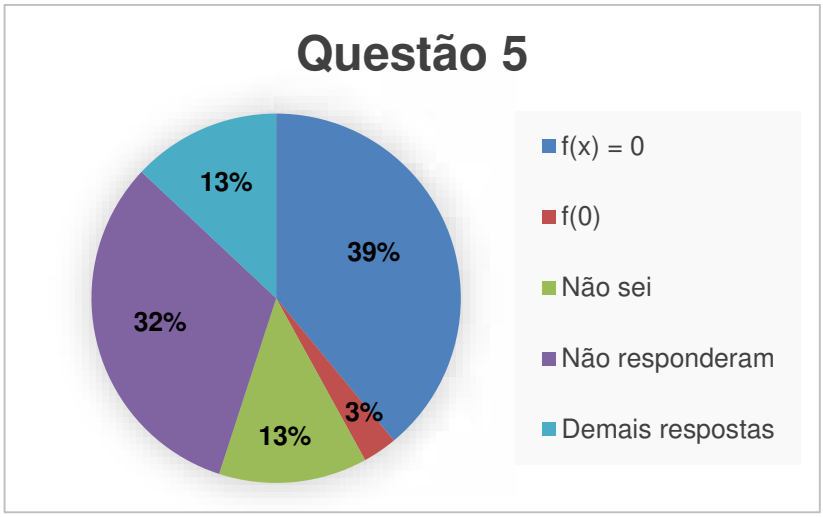
> "Acredito que seja qual valor precisamos atribuir à variável para que a função tenha o 0 como resultado. Para ensinar, pode-se fazer a pergunta ao aluno: Qual valor atribuir para que essa função resulte em 0?"

> “"Zero de função" é ou são o(s) valor(es) nos quais a função assume o valor zero. Ensinaria a partir dessa ideia e mostraria, graficamente, que são os valores em que o gráfico cruza o eixo x (por exemplo), isto é, quando a coordenada do y (por exemplo), ou de $f(x)$, é igual a zero.”

A partir dessas respostas é possível identificar diferentes métodos de ensino de um mesmo conteúdo. A primeira resposta apresenta a utilização do conteúdo de equação para encontrar as raízes das funções. A segunda e a terceira respostas se assemelham no que diz respeito a ambas abordarem o conteúdo de forma a pensar em quais valores o x deve assumir para que a função resulte em zero. No entanto, o licenciando da terceira resposta lança o conteúdo aos alunos como uma pergunta, buscando estimular os alunos a pensarem nos valores, já o da segunda resposta, apresenta como deve ser feito. A quarta resposta além de abranger as outras respostas ela aborda, também, a parte gráfica da função, buscando apresentar aos alunos, geometricamente, o que são os zeros de uma função.

Abaixo, o Gráfico 5 apresenta o panorama em relação a quantidade de respostas para essa questão.

Gráfico 5: Respostas da Questão 5



Fonte: Dados da pesquisa

Considerações Finais

A partir de buscas por pesquisas relacionadas ao número zero, foi possível perceber a escassez das pesquisas nessa temática. No entanto, as pesquisas encontradas e esse artigo apresentam que o número zero deve ser explorado com mais afinco, afim de não apenas expor as particularidades desse número nos conteúdos para os alunos, mas sim, explorá-los para a construção dos conceitos que os fundamentam.

Retomando o objetivo da pesquisa de compreender como os licenciandos lidam com o zero nos diferentes pensamentos da Matemática, foi possível perceber, através dos questionários e das respostas obtidas, como apresentado, que o zero e seus significados nas diferentes abordagens matemáticas não seguem um padrão.

Em geral, observa-se que o modo como os licenciandos lidam com o zero antes de entrarem na universidade prevalecem em algumas abordagens, como é o caso da questão 4 (potência com expoente zero) e, também, a questão 5 (zero da função), na qual foi possível perceber que as confusões como: Todo número elevado a zero é 1 é uma definição ou é possível demonstrar? Zero de uma função são os valores de x que zeram a função ou são os valores da função quando x assume o valor zero? Essas confusões quanto às questões veem do

Ensino Médio e prevalecem, mas durante o curso, de acordo com o panorama apresentado pelos questionários, foi possível perceber que essas e outras ideias são amadurecidas e a confusão tende a diminuir.

Pode-se perceber, também, que no caso da questão 2 (zero na geometria), o currículo influenciou nas respostas dos licenciandos, gerando uma semelhança entre as respostas das turmas de acordo com a disciplina que estavam cursando quando o questionário foi aplicado. Além disso, ficou evidente na questão 1 (zero na aritmética) que muitas vezes as explicações não ficam claras o suficiente para que possam aplicar, havendo confusão em algumas definições, nesse caso, a dúvida foi quanto à definição de número par: todo número par é escrito na forma $2k$ com $k \in \mathbb{Z}$ ou $k \in \mathbb{Z}^*$(Números Inteiros sem o zero)?

Além disso, esse artigo apresentou um pouco sobre como os futuros professores ensinariam determinados conteúdos e as particularidades do zero. Tendo isso em vista, nota-se uma preocupação ainda maior devido ao fato dos licenciandos ainda apresentarem dúvidas em determinados conteúdos e poderem, futuramente, apresentar aos alunos de maneira incorreta o modo como lidar com o zero em alguns conteúdos, o que acaba gerando um círculo vicioso.

Sendo assim, trata-se de um número que exige maior atenção e dedicação e que assume um papel muito importante em todas as áreas. Por isso, não deve ser descartado ou visto rapidamente, é preciso explorar mais os significados do zero, e a maneira como ele deve ser manipulado nos diversos ramos da Matemática, e para isso, é necessário pensamentos mais elaborados para compreender toda a sua complexidade.

Referências

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 31–51.

GUIMARÃES, F. **Sentidos do Zero**. Programa de Estudos Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo –PUC/SP. 2008.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8a. ed. Rio de Janeiro: Record, 1997.

MICHAELIS. **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. Disponível em: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php>. Acesso em: 22 jun. 2017.

ROMANELLO, L. A. Percepções de licenciandos de matemática sobre o zero em diferentes conteúdos matemáticos. In: Seminário Nacional de História e Investigações de/em Aulas de Matemática, V., Campinas. **Anais...** Campinas: SHIAM, 2015. p.318-332.

SALVADOR, C. M. A.; NACARATO, A. M. Sentidos atribuídos ao zero por alunos de 6ª série. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 26, 2003, Poços de Caldas. **Anais...** Poços de Caldas: ANPED, 2003.